Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III.

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAȘ à Bucarest.

A la mémoire de J. von Neumann.

Dans cet article on traitera des relations spectrales et fonctionnelles entre les contractions de l'espace de Hilbert et les transformations unitaires qui leur correspondent dans le sens des articles précédents du premier auteur, ainsi que des relations entre semi-groupes de contractions et leurs "génératrices" et "cogénératrices". Faisant usage de la notion de l'ensemble spectral, due à J. VON NEUMANN, on passe ensuite du cas d'une contraction et du disque unité du plan complexe au cas d'une transformation linéaire bornée quelconque T et d'un ensemble spectral de T.

I.

1. Soit T une contraction de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. On sait (voir [10], [11], [13]) qu'il existe, dans un espace de Hilbert $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$, une transformation unitaire U telle qu'on ait

$$T^n = \mathrm{pr}\, U^n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)^{1)}$$

et que $\mathfrak{K}$ soit sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); ces conditions déterminent U d'une manière univoque[2]; appelons *U la dilatation unitaire* de la contraction T.

Le théorème suivant établit une relation spectrale simple entre T et U.

Théorème 1. *Si U est la dilatation unitaire de la contraction T, toute valeur propre de T de module 1 est une valeur propre de U aussi et inversement. Les vecteurs propres correspondants sont les mêmes pour T et U.*

Démonstration. La dilatation unitaire de cT ($|c| = 1$) étant évidemment égale à cU, il suffit d'envisager le cas de la valeur propre 1. Ce qu'il

---

1) Nous utilisons la terminologie de [12] et [13].

2) A condition qu'on ne distingue pas entre les différentes réalisations du prolongement $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{H}$.

faut alors démontrer c'est que (i) $Th=h$ pour un $h\in\mathfrak{H}$ entraîne $Uh=h$, (ii) $Uf=f$ pour un $f\in\mathfrak{K}$ entraîne $f\in\mathfrak{H}$ et $Tf=f$.

Ad (i): $Th=h$ entraîne $\|Uh\|=\|h\|=\|Th\|$; or comme on a $Th=PUh$ où P est la projection orthogonale de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{H}$, cela entraîne que $Uh=Th$, donc $Uh=h$.

Ad (ii): Soit $Uf=f$, $f\in\mathfrak{K}$. L'espace $\mathfrak{K}$ étant sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ $(h\in\mathfrak{H};\, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, f peut être représenté sous la forme

$$f=\lim f_n \quad \text{où} \quad f_n=\sum_{k=-\nu_n}^{\nu_n} U^k h_{n,k},\quad h_{n,k}\in\mathfrak{H}.$$

Vu que $U^\nu f=f$ pour tout entier ν, on a pour $n\to\infty$

$$\|U^{\nu_n}f_n-f\|=\|U^{\nu_n}(f_n-f)\|=\|f_n-f\|\to 0,$$

donc

$$\sum_{m=0}^{2\nu_n} U^m g_{n,m}\to f \quad \text{où} \quad g_{n,m}=h_{n,m-\nu_n},$$

et par conséquent

$$\sum_{m=0}^{2\nu_n} U^{m+1} g_{n,m}\to Uf=f.$$

En appliquant la projection P il en résulte que

$$u_n=\sum_{m=0}^{2\nu_n} T^m g_{n,m}\to Pf, \qquad Tu_n=\sum_{m=0}^{2\nu_n} T^{m+1} g_{n,m}\to Pf,$$

donc

$$TPf=Pf. \tag{1}$$

En vertu de la proposition (i), déjà démontrée, il s'ensuit que

$$UPf=Pf,$$

et comme on a par hypothèse $Uf=f$, il résulte que

$$U(I-P)f=(I-P)f, \quad \text{donc aussi} \quad U^m(I-P)f=(I-P)f$$
$$(m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Or $(I-P)f$ est orthogonal à $\mathfrak{H}$ et alors $U^m(I-P)f$ est orthogonal à $U^m\mathfrak{H}$, et de cette façon $(I-P)f$ est orthogonal à tous les sous-espaces $U^m\mathfrak{H}$, ce qui n'est possible que si $(I-P)f=0$. Donc $f=Pf\in\mathfrak{H}$; en vertu de (1) cela achève la démonstration.

2. Passons au calcul fonctionnel avec la contraction T. Convenons d'abord d'une définition:

Définition 1. *Soit $\mathcal{O}(S_0)$ la classe des fonctions $u(\lambda)$, holomorphes dans un domaine du plan complexe contenant le disque unité fermé*

$$S_0=\{\lambda: |\lambda|\leqq 1\}$$

(ce domaine pouvant varier avec u).

On définit par la formule

$$u(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\lambda^n\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}c_nT^n=u(T) \tag{2}$$

une application de la classe $\mathcal{O}(S_0)$ dans l'algèbre des transformations linéaires bornées de l'espace $\mathfrak{H}$ (la série des transformations converge en norme puisque $\limsup|c_n|^{\frac{1}{n}}<1$ et $\|T\|\leqq 1$). Cette application est évidemment linéaire et multiplicative:

$$(c_1u_1+c_2u_2)(T)=c_1u_1(T)+c_2u_2(T),\quad (u_1, u_2)(T)=u_1(T)\,u_2(T);$$

de plus on a, vu que la projection est une transformation linéaire continue,

$$u(T)=\operatorname{pr}u(U) \tag{3}$$

où U est la dilatation unitaire de T.

Or cette formule nous offre une possibilité d'étendre la classe des fonctions envisagées, en effet, $u(U)$ a sens pour des fonctions $u(\lambda)$ de type beaucoup plus général. Notamment, si $\{E_\Theta\}$ est la famille spectrale de U $(0\leqq\Theta\leqq 2\pi)$, $u(U)$ a sens par la formule

$$(u(U)f, g)=\int_0^{2\pi}u(e^{i\Theta})\,d(E_\Theta f, g)\qquad (f, g\in\mathfrak{R}) \tag{4}$$

pour toute fonction $u(\lambda)$ dont les valeurs sur le cercle unité constituent une fonction $u(e^{i\Theta})$, définie presque partout, bornée et mesurable par rapport à E_Θ, c'est-à-dire par rapport à chaque fonction non-décroissante $(E_\Theta f, f)$ $(f\in\mathfrak{R})$. Pour ces fonctions l'application $u(\lambda)\rightarrow u(U)$ est linéaire et multiplicative (et pour $u\in\mathcal{O}$ coïncide avec la définition par (2)), de plus on a

$$\|u(U)\|=\operatorname{vrai\,max}|u(e^{i\Theta})|, \tag{5}$$

le vrai maximum étant considéré par rapport à E_Θ. Mais si l'on veut définir, pour toutes ces fonctions, l'application $u(\lambda)\rightarrow u(T)$ par (3), celle-ci sera bien linéaire mais en général non-multiplicative.

Cela impose le problème de choisir une sous-classe de ces fonctions formant une algèbre, pour laquelle cette application soit aussi multiplicative; cette sous-classe doit naturellement comprendre la classe $\mathcal{O}(S_0)$ et doit être fermée dans un certain sens. En ce but, donnons la définition suivante:

Définition 2. *Soit* $\mathcal{O}_T(S_0)$ *la classe des fonctions* $u(\lambda)$, *bornées et holomorphes dans l'intérieur du disque unité* S_0 *et pour lesquelles*

$$u(e^{i\Theta}) = \lim_{r \to 1-0} u(re^{i\Theta})$$

existe en tout point $e^{i\Theta}$ *du cercle unité exceptés peut-être les points d'un ensemble dénombrable, ne contenant aucune valeur propre de* T.

La fonction $u(e^{i\Theta})$ est alors définie, en vertu du théorème 1, presque partout par rapport à E_Θ, et est bornée et mesurable par rapport à E_Θ, donc $u(U)$ et $u(T)$ existent, *définies par les formules* (3) *et* (4).

La classe $\mathcal{O}_T(S_0)$ est évidemment une algèbre et contient la classe $\mathcal{O}(S_0)$ comme une sous-algèbre. On a le

Théorème 2. (i) *L'application* $u(\lambda) \to u(T)$, *définie pour la classe* $\mathcal{O}_T(S_0)$ *par les formules* (3) *et* (4), *est linéaire, multiplicative, et telle que*

$$\|u(T)\| \leqq \sup_{|\lambda|<1} |u(\lambda)|. \tag{6}$$

Pour $u(\lambda) \in \mathcal{O}(S_0)$ *cette définition est équivalente à la définition directe* (2).

(ii) *Pour toute suite* $u_n(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$, *tendant vers* $u(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$ *dans le sens que* $u_n(\lambda)$ *est également bornée dans l'intérieur de* S_0 *et* $u_n(e^{i\Theta})$ *tend vers* $u(e^{i\Theta})$ *en tout point* $e^{i\Theta}$ *exceptés peut-être les points d'un ensemble dénombrable ne contenant aucune valeur propre de* T, *on a*

$$u_n(T) \to u(T) \qquad \text{(convergence forte).}$$

(iii) *Pour* T *normale et* $u(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$ *la définition de* $u(T)$ *par* (3) *et* (4) *est équivalente à la définition usuelle moyennant la décomposition spectrale* $T = \int \lambda \, dK_\lambda$; *on a notamment*

$$(u(T)f, g) = \int u(\lambda)\, d(K_\lambda f, g), \quad \|u(T)f\|^2 = \int |u(\lambda)|^2 \, d\|K_\lambda f\|^2, \tag{7}$$

l'intégration étant étendue sur le spectre de T *(qui est contenu dans le disque* S_0*)*.

(iv) *Soit* $\lambda \to l(\lambda)$ *une application homographique du disque unité* S_0 *sur lui-même,* $l(\lambda) = a(\lambda - b)(1 - \bar{b}\lambda)^{-1}$ $(|a| = 1, |b| < 1)$; *on a alors* $l(\lambda) \in \mathcal{O}(S_0)$ *et* $T' = l(T)$ *est une contraction. Pour toute fonction* $u(\lambda') \in \mathcal{O}_{T'}(S_0)$ *la fonction composée* $u \circ l(\lambda) = u(l(\lambda))$ *appartient à* $\mathcal{O}_T(S_0)$ *et on a*

$$u \circ l(T) = u(T').$$

(v) *Pour* $u(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$ *le spectre de la transformation* $T' = u(T)$ *est contenu dans l'adhérence* $\bar{Z}$ *de l'ensemble* Z *(évidemment borné) des valeurs de la fonction* $u(\lambda)$ *prises dans l'intérieur de* S_0. *Pour toute fonction* $w(z)$, *holomorphe dans un domaine E_w du plan complexe contenant l'ensemble $\bar{Z}$ dans son intérieur, $w \circ u(\lambda) = w(u(\lambda))$ appartient à $\mathcal{O}_T(S_0)$ et on a*

$$w \circ u(T) = w^R(u(T))$$

où $w^R(T')$ désigne la transformation qui correspond à la fonction $w(z)$ et à la transformation T' par le calcul fonctionnel de Riesz—Dunford (cf. [7] n° 151).

Démonstration. Sauf l'assertion concernant la multiplicativité, (i) découle immédiatement de la définition et de (5) si l'on remarque que

$$\sup |u(e^{i\theta})| \leqq \sup_{|\lambda|<1} |u(\lambda)|.$$

(ii) découle du théorème de convergence de Lebesgue; en effet, on a

$$\|[u_n(T)-u(T)]f\|^2 \leqq \|[u_n(U)-u(U)]f\|^2 = \int_0^{2\pi} |u_n(e^{i\theta})-u(e^{i\theta})|^2 \, d\|E_\theta f\|^2,$$

or les fonctions sous le signe d'intégrale sont également bornées et tendent vers 0 pour $n \to \infty$, presque partout par rapport à E_θ.

Pour $u(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$ on a $u_r(\lambda) = u(r\lambda) \in \mathcal{O}(S_0)$ $(0 < r < 1)$, et lorsque $r \to 1-0$, $u_r(\lambda)$ tend vers $u(\lambda)$ dans le sens de (ii). Donc on a

$$u_r(T) \to u(T) \qquad \text{(convergence forte).} \tag{8}$$

Grâce à la propriété multiplicative de l'application pour la classe $\mathcal{O}(S_0)$, il s'ensuit que si $u, v \in \mathcal{O}_T(S_0)$, on a d'une part

$$(uv)_r(T) = u_r(T)\, v_r(T) \to u(T)\, v(T);$$

d'autre part

$$(uv)_r(T) \to (uv)(T),$$

donc $(uv)(T) = u(T)\, v(T)$, ce qui prouve la propriété multiplicative pour la classe $\mathcal{O}_T(S_0)$.

Si T est normale et $u(\lambda) \in \mathcal{O}(S_0)$, la définition de $u(T)$ par (3), (4) est équivalente à la définition par (2), et celle-ci est équivalente à la définition par (7), donc, dans ce cas, la définition par (3), (4) est équivalente à la définition par (7). On en passe au cas d'une fonction $u(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$ en faisant intervenir de nouveau les fonctions $u_r(\lambda)$ et en remarquant que, en vertu du théorème de convergence de Lebesgue,

$$\int u_r(\lambda)\, d(K_\lambda f, g) \to \int u(\lambda)\, d(K_\lambda f, g) \qquad (r \to 1-0).$$

Cela prouve (iii)

Prouvons (iv). Le fait que $l(\lambda) \in \mathcal{O}(S_0)$ est immédiat, donc T' existe; $\|T'\| \leqq 1$ s'ensuit de (6). En vertu des relations $T' = a(T-b)(I-\bar{b}T)^{-1}$, $T = \bar{a}(T' + abI)(I + \bar{a}\bar{b}T')^{-1}$, les valeurs propres de T' sont précisément les images des valeurs propres de T par l'application $\lambda \to l(\lambda)$. Par (i) on a $l^n(T) = [l(T)]^n$ et plus généralement $p \circ l(T) = p(T')$ pour tout polynome

$p(\lambda)$; (8) en dérive pour tout $u \in \mathcal{O}(S_0)$ par (ii), parce que les sommes partielles $p_n(\lambda)$ de la série entière de $u(\lambda)$ convergent uniformément vers $u(\lambda)$ sur le cercle $|\lambda| = 1$, de même que les $p_n \circ l(\lambda)$ vers $u \circ l(\lambda)$. Dans le cas général d'une fonction $u(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$ envisageons les fonctions $u_r(\lambda) \in \mathcal{O}(S_0)$. Remarquons tout d'abord que, pour $r \to 1-0$,

$$\lim u(rl(e^{i\Theta})) = \lim u(l(re^{i\Theta}))$$

en tout point $e^{i\Theta}$ où la première limite existe; en effet, la valeur limite de $u(\lambda)$ en un point λ_0 du cercle unité est la même si le point variable λ ($|\lambda| < 1$) s'approche de λ_0 le long du rayon ou le long d'un cercle orthogonal au cercle unité (ou le long de n'importe quel chemin qui reste dans un angle formé par deux cordes du cercle unité issues de λ_0). De là il s'ensuit que pour $r \to 1-0$ la limite de $u \circ l(re^{i\Theta})$ existe en tout point $e^{i\Theta}$ avec peut-être un ensemble dénombrable d'exceptions, elle existe en particulier en tout point $e^{i\Theta}$ pour lequel $l(e^{i\Theta})$ est une valeur propre de T', c'est-à-dire pour lequel $e^{i\Theta}$ lui-même est une valeur propre de T. Cela veut dire que $u \circ l(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$. La relation $u_r \circ l(T) = u_r(T')$ étant vraie pour tout r ($0 < r < 1$), la relation $u \circ l(T) = u(T')$ s'ensuit par (ii). En effet, lorsque r tend vers $1-0$, $u_r(\lambda)$ tend vers $u(\lambda)$ dans le sens de (ii) par rapport à T', et $u_r \circ l(\lambda) = u(rl(\lambda))$ tend vers $u(l(\lambda)) = u \circ l(\lambda)$ dans le sens de (ii) par rapport à T.

Reste à prouver (v). Pour $z \notin \bar{Z}$ la fonction $v_z(\lambda) = [z - u(\lambda)]^{-1}$ appartient évidemment à $\mathcal{O}_T(S_0)$, et grâce à la propriété multiplicative on a $v_z(T) = [zI - u(T)]^{-1}$. Cela prouve que z n'appartient pas au spectre $\sigma(T')$ de $T' = u(T)$, donc $\sigma(T') \subseteqq \bar{Z}$. Soit alors $w(z)$ une fonction, holomorphe dans un domaine (ouvert connexe) E_w contenant l'ensemble $\bar{Z}$ dans son intérieur. Puisque $\bar{Z}$ est borné, fermé (et connexe) il existe un domaine D tel que $\bar{Z} \subset D \subset E_w$ et dont la frontière ∂D se compose d'un nombre fini de courbes fermées jordaniennes rectifiables C_k passant dans E_w et orientées conformément à l'orientation de D comme sous-ensemble ouvert du plan complexe orienté (l'existence de tel domaine D peut être démontrée par application du théorème de recouvrement de Borel). Soit d (> 0) la distance de ∂D à $\bar{Z}$. Envisageons une décomposition de chaque C_k par des points consécutifs $z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)} = z_0^{(k)}$ et y faisons correspondre la fonction

$$s(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \sum_{n=1}^{n_k} \frac{w(z_n^{(k)})}{z_n^{(k)} - u(\lambda)} (z_n^{(k)} - z_{n-1}^{(k)}).$$

Celle-ci est holomorphe dans l'intérieur de S_0 et y est bornée par une constante indépendante de la décomposition particulière choisie:

$$|s(\lambda)| \leqq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \partial D} |w(z)| \cdot \frac{1}{d} \cdot |\partial D|$$

où $|\partial D|$ désigne la longueur totale de ∂D. La limite radiale $s(e^{i\theta})$ existe en tout point où celle de $u(\lambda)$ existe. Donc $s(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$. Faisons varier les décompositions des courbes C_k de sorte qu'elles deviennent infiniment fines, $s(\lambda)$ tend alors vers la fonction

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{w(z)}{z-u(\lambda)} dz = w(u(\lambda)) = w \circ u(\lambda)$$

au sens de (ii), et par conséquent $s(T)$ tend vers $w \circ u(T)$. D'autre part il découle de (i) et de la définition de $w^R(u(T))$:

$$s(T) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \sum_{n-1}^{n_k} w(z_n^{(k)}) [z_n^{(k)} I - u(T)]^{-1} (z_n^{(k)} - z_{n-1}^{(k)}) \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} w(z) [zI - u(T)]^{-1} dz = w^R(u(T)).$$

Cela achève la démonstration.

Corollaire 2.1. *Si $T \subseteq U$, c'est-à-dire si T est isométrique, on a $u(T) \subseteq u(U)$ pour toute fonction $u(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$.* [3])

Démonstration. Pour $u(\lambda) \in \mathcal{O}(S_0)$ cela découle de (2). On en passe aux fonctions $u(\lambda) \in \mathcal{O}_T(S_0)$ par l'intermédiaire des fonctions $u_r(\lambda) \in \mathcal{O}(S_0)$ faisant usage de (8).

Corollaire 2.2. *Si la contraction T n'est pas unitaire, le spectre de sa dilatation unitaire U recouvre le cercle unité.*

Démonstration. En cas contraire il y a un arc fermé α du cercle unité (différent du cercle entier) portant tout le spectre de U; comme α est à l'intérieur d'un domaine simplement connexe du plan complexe ne contenant pas le point 0, il s'ensuit du théorème de RUNGE qu'il existe une suite de polynomes $p_n(\lambda)$ tendant uniformément vers la fonction $1/\lambda$ sur α. En vertu de (5) on a alors

$$\|U^{-1} - p_n(U)\| \leqq \max_{\lambda \in \alpha} |1/\lambda - p_n(\lambda)| \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

donc

$$p_n(U) \to U^{-1}, \quad U p_n(U) \to I_{\mathfrak{K}} \quad \text{(transformation identique de } \mathfrak{K}),$$

et par conséquent

$$p_n(T) = \operatorname{pr} p_n(U) \to \operatorname{pr} U^{-1} = \operatorname{pr} U^* = T^*, \quad T p_n(T) = \operatorname{pr} U p_n(U) \to I.$$

[3]) Pour les transformations isométriques un calcul fonctionnel voisin a été proposé (implicitement) par PLESSNER [5], [6].

Il s'ensuit que

$$T^* T = [\lim p_n(T)]\, T = \lim [p_n(T)\, T] = I,$$
$$T T^* = T \lim p_n(T) \;= \lim [T p_n(T)] \;= I.$$

Donc $T^* T = T T^* = I$, T est unitaire.

II.

3. Indiquons maintenant quelques applications de ce calcul fonctionnel aux semi-groupes à un paramètre $\{T_s\}_{s\geqq 0}$ de contractions de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, continus dans le sens que $T_s \to I$ pour $s \to 0$. On sait que la transformation „infinitésimale“

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(T_s - I) \tag{9}$$

est linéaire, fermée, à domaine dense dans $\mathfrak{H}$, $A - I$ admet une inverse partout définie et bornée, et la transformation

$$T = (A+I)(A-I)^{-1} \tag{10}$$

est une contraction; inversement pour toute transformation A jouissant de ces propriétés il existe un semi-groupe de contractions continu $\{T_s\}$ et un seul tel que la relation (9) soit vérifiée[4]). On appellera A la *génératrice* du semi-groupe $\{T_s\}$.

La contraction T n'a pas la valeur propre 1; en effet, comme on a $T = I + 2(A-I)^{-1}$, $Th = h$ entraîne $(A-I)^{-1}h = 0$, $h = 0$. Inversement, pour toute contraction T dont 1 n'est pas une valeur propre, il existe une transformation A et une seule avec laquelle T soit en relation (10), notamment $A = (T+I)(T-I)^{-1} = I + 2(T-I)^{-1}$.[5])

Donc, pour toute contraction T n'ayant pas la valeur propre 1, il existe un semi-groupe continu de contractions $\{T_s\}$ et un seul tel que les relations (9) et (10) soient vérifiées. Appelons T la *cogénératrice* de $\{T_s\}$.

La relation mutuelle entre le semi-groupe $\{T_s\}$ et sa cogénératrice T est explicitée par le théorème suivant:

Théorème 3. *On a pour tout* $s \geqq 0$

$$T_s = u_s(T) \quad \text{où} \quad u_s(\lambda) = \exp\left(s\,\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right), \tag{11}$$

et inversement

$$R_s = [T_s - (1-s)\,I]\,[T_s - (1+s)\,I]^{-1} \to T \qquad (s \to 0). \tag{12}$$

---

[4]) Théorème de Hille et Yosida, cf. [2] p. 238, adapté aux semi-groupes de contractions de l'espace de Hilbert, cf. [12] p. 6—8 ou [1] § 5.

[5]) $(T-I)^{-1}$ a son domaine dense dans $\mathfrak{H}$, puisque en cas contraire 1 serait une valeur propre de T^* et alors de T aussi, cf. [10] ou [13] § 4. 3.

Démonstration. La fonction $u_s(\lambda)$ a son seul point singulier $\lambda=1$, et pour $|\lambda|\leqq 1$, $\lambda\neq 1$, on a $|u_s(\lambda)|\leqq 1$. Puisque T est une contraction n'ayant pas la valeur propre 1, on a $u_s(\lambda)\in\mathcal{O}_T(S_0)$, donc $u_s(T)$ existe et, en vertu du théorème 2 (6), $u_s(T)$ est une contraction pour tout $s\geqq 0$. De plus les relations $u_t(\lambda)\,u_s(\lambda)=u_{t+s}(\lambda)$, $\lim\limits_{s\to 0} u_s(\lambda)=1$ $(|\lambda|\leqq 1,\ \lambda\neq 1)$ entraînent, en vertu du théorème 2, (i) et (ii), que les contractions $u_s(T)$ forment un semi-groupe continu. Soient A' et T' la génératrice et la cogénératrice de $u_s(T)$; montrons que $T'=T$.

Envisageons à cet effet les fonctions

$$v_s(\lambda)=\frac{u_s(\lambda)-1+s}{u_s(\lambda)-1-s}\qquad (s>0);$$

$v_s(\lambda)$ est holomorphe pour $|\lambda|<1$, continue pour $|\lambda|\leqq 1$, $\lambda\neq 1$, et on a $|v_s(\lambda)|\leqq 1$ et $\lim\limits_{s\to 0} v_s(\lambda)=\lambda$ pour $|\lambda|\leqq 1$, $\lambda\neq 1$. En vertu du théorème 2, $v_s(T)$ existe et on a

$$\|v_s(T)\|\leqq 1,\qquad \lim_{s\to 0} v_s(T)=T \text{ (limite forte).} \tag{13}$$

La relation $v_s(\lambda)\,[u_s(\lambda)-1-s]=u_s(\lambda)-1+s$ entraîne, en vertu du théorème 2 (i), la relation

$$v_s(T)\,[u_s(T)-(1+s)\,I]=u_s(T)-(1-s)\,I, \tag{14}$$

d'où il s'ensuit que

$$v_s(T)=[u_s(T)-(1-s)\,I]\,[u_s(T)-(1+s)\,I]^{-1} \tag{15}$$

(l'inverse en question existe puisque $\|u_s(T)\|\leqq 1$ et $1+s>1$). D'autre part, en appliquant les transformations figurant aux deux membres de (14) à un élément h du domaine de A', divisant par s et faisant tendre ensuite s vers 0, il résulte en vertu de (13):

$$T(A'-I)\,h=(A'+I)\,h.$$

Donc on a

$$T(A'-I)=A'+I,\quad T=(A'+I)(A'-I)^{-1}$$

ce qui prouve que $T=T'$. Cela extraîne que $T_s=u_s(T)$; enfin, (13) et (15) entraînent (12).

Remarque. Ce raisonnement prouve que, pour toute contraction T n'ayant pas la valeur propre 1, on peut construire par (11) un semi-groupe de contractions $\{T_s\}$ qui est avec T en la relation exprimée par (9) et (10). *L'unicité* de tel semi-groupe résulte, comme on l'a déjà dit, du théorème de HILLE et YOSIDA.

4. Le théorème suivant, conséquence du théorème 3, montre qu'un semi-groupe de contractions et sa cogénératrice sont, pour ainsi dire, toujours de même type.

Théorème 4. *Pour que le semi-groupe continu de contractions $\{T_s\}$ soit constitué de transformations normales, autoadjointes ou unitaires, il faut et il suffit que sa cogénératrice T soit normale, autoadjointe ou unitaire, selon les cas.*

Démonstration. Si $\{T_s\}$ est constitué de transformations normales, T_s est permutable avec T_t pour tout s, t,[6]) d'où il s'ensuit que les transformations R_s, $R_s - R_t$ (voir (12)) sont aussi normales, et par conséquent $\|R_s h\| = \|R_s^* h\|$, $\|(R_s - R_t) h\| = \|(R_s^* - R_t^*) h\|$ pour tout $h \in \mathfrak{H}$. Or, d'après (12) on a $R_s \to T$ et par conséquent $R_s^* \rightharpoonup T^*$ pour $s \to 0$; les relations que nous venons d'obtenir entraînent que R_s^* converge vers T^* aussi fortement, et que $\|Th\| = \|T^* h\|$, donc T est aussi normale.

Si les T_s sont autoadjointes, les R_s sont de même ainsi que leur limite T. Si les T_s sont unitaires, on a

$$\|h\| \geqq \|R_s h\| \geqq \frac{2-s}{2+s}\|h\| \qquad \text{pour} \quad 0 < s \leqq 1;$$

cette inégalité découle de ce que pour $|\lambda| = 1$ on a

$$1 \geqq \left|\frac{\lambda-(1-s)}{\lambda+(1+s)}\right| \geqq \frac{2-s}{2+s}.^{7)}$$

Il s'ensuit que $\|Th\| = \lim\limits_{s \to 0} \|R_s h\| = \|h\|$. Vu que T doit être normale, cela implique que T est unitaire.

Supposons maintenant que T est normale ayant la décomposition spectrale $T = \int \lambda \, dK_\lambda$.[8]) On a alors d'après (11) et (7)

$$T_s = \int u_s(\lambda) \, dK_\lambda,$$

donc les T_s sont aussi normales. Comme il suffit d'intégrer ici sur le spectre de T, et comme $u_s(\lambda)$ est de valeurs réelles sur l'axe réel et de module 1 sur le cercle unité, il s'ensuit que si T est autoadjointe ou unitaire, il en est de même de T_s, selon les cas.

Dans le cas de T_s unitaires on a donc

$$T_s = \int\limits_{|\lambda|=1} \exp\left(s \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) dK_\lambda$$

et cette représentation se réduit à celle du théorème de Stone,

$$T_s = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \, dE_x,$$

---

[6]) Cf. [9] p. 74.

[7]) Cf. le raisonnement sur la fonction $u_\varepsilon(z)$ dans [12] p. 7—8.

[8]) Puisque T n'a pas la valeur propre 1, la mesure spectrale du point 1 est égale à O.

si l'on passe du cercle unité, privé du point $\lambda=1$, à l'axe réel par l'application

$$\lambda \rightarrow x=-i\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \qquad (|\lambda|=1, \lambda \neq 1).^{9)}$$

De même, si les T_s sont autoadjointes, on parvient à la représentation spectrale

$$T_s=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty}\,dE_y, ^{10)}$$

et cela en passant de l'intervalle $-1 \leqq \lambda < 1$ au demi-axe $0 \leqq y < \infty$ par l'application

$$\lambda \rightarrow y=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}.$$

5. Soit $\{T_s\}$ un semi-groupe continu de contractions de $\mathfrak{H}$, T sa cogénératrice, et U la dilatation unitaire de T, opérant dans l'espace $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$. Soit $\{U_s\}$ le groupe continu à un paramètre de transformations unitaires de l'espace $\mathfrak{K}$, dont la cogénératrice est égale à U. Puisqu'on a $U_s=u_s(U)$, $T_s=u_s(T)$ pour $s \geqq 0$, on a par la définition même de $u_s(T)$:

$$T_s=\operatorname{pr} U_s \qquad (s \geqq 0). \tag{16}$$

Montrons que l'espace $\mathfrak{K}$ est sous-tendu par les éléments de la forme $U_s h$ ($h \in \mathfrak{H}$, $-\infty < s < \infty$). Envisageons à cet effet la fonction $r(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^m$ avec m entier fixé; elle est continue et de module 1 sur l'axe $-\infty < x < \infty$. Il existe alors une suite de polynomes trigonométriques

$$p_n(x)=\sum_{k=1}^{r_n} c_{n,k}\, e^{is_{n,k}x} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

avec des valeurs réelles $s_{n,k}$ non nécessairement commensurables aux exposants, tels que

$$|p_n(x)| \leqq 2, \quad p_n(x) \rightarrow r(x) \quad (n \rightarrow \infty).^{11)}$$

En faisant la substitution

$$x=\frac{1}{i}\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}, \quad \frac{x-i}{x+i}=e^{i\theta}$$

---

9) Cette voie d'arriver au théorème de STONE est très voisine de celle suivie par J. VON NEUMANN [3].

10) Cas particulier d'un théorème de SZ.-NAGY et HILLE, cf. [9] p. 73 ou [2] p. 375.

11) On peut choisir pour $p_n(x)$ p. ex. un polynome trigonométrique de période $4n$, s'approchant dans l'intervalle $-n \leqq x \leqq 3n$ à $1/n$ près de la fonction $r_n(x)$ qui coïncide avec $r(x)$ pour $-n \leqq x \leqq n$ et est égale à $r(2n-x)$ pour $n \leqq x \leqq 3n$.

on obtient la suite

$$q_n(e^{i\Theta}) = \sum_{k=1}^{\nu_n} c_{n,k}\, u_{s_{n,k}}(e^{i\Theta}),$$

$u_s(\lambda)$ étant la fonction définie par (11). Comme la suite $\{q_n(e^{i\Theta})\}$ est bornée et tend vers $e^{im\Theta}$ pour $0<\Theta<2\pi$, et comme U n'a pas la valeur propre 1, il découle du théorème 2 (ii) et de (11)[12]) que

$$q_n(U) = \sum_{k=1}^{\nu_n} c_{n,k}\, u_{s_{n,k}}(U) = \sum_{k=1}^{\nu_n} c_{n,k}\, U_{s_{n,k}} \to U^m \quad (n\to\infty).$$

L'espace $\mathfrak{K}$, qui est sous-tendu par les éléments de la forme $U^m h$ ($h\in\mathfrak{H}$, m entier), est donc sous-tendu aussi par les éléments $U_s h$ ($h\in\mathfrak{H}$, $-\infty<s<\infty$). De cette façon on vient de démontrer que pour tout semi-groupe continu $\{T_s\}_{s\geqq 0}$ de contractions de l'espace $\mathfrak{H}$ il existe un groupe continu $\{U_s\}_{-\infty<s<\infty}$ de transformations unitaires d'un espace $\mathfrak{K}\supseteqq\mathfrak{H}$, tel que la relation (16) soit vérifiée et $\mathfrak{K}$ soit sous-tendu par les éléments de la forme $U_s h$ ($h\in\mathfrak{H}$, $-\infty<s<\infty$). Il est facile à montrer que ces propriétés de $\{U_s\}$ le déterminent d'une manière univoque[13]); nous l'appellerons *la dilatation unitaire du semi-groupe* $\{T_s\}$.

On vient de retrouver de cette manière le théorème IV de [13] (voir aussi [10] et [1]) comme une conséquence du théorème III, sur la dilatation unitaire d'une contraction[14]).

De plus on a démontré une relation entre les dilatations unitaires du semi-groupe $\{T_s\}$ et de sa cogénératrice T:

Théorème 5. *La dilatation unitaire $\{U_s\}$ d'un semi-groupe continu de contractions $\{T_s\}$ a sa cogénératrice égale à la dilatation unitaire de la cogénératrice de $\{T_s\}$.*

Corollaire 5.1. *Pour que le semi-groupe continu de contractions $\{T_s\}$ soit constitué de transformations isométriques, il faut et il suffit que sa cogénératrice T soit isométrique.*

Démonstration. Soient $\{U_s\}$, U les dilatations unitaires de $\{T_s\}$ et T, selon les cas. D'après le théorème 5, U est la cogénératrice de U_s, donc on a, en vertu du théorème 3, $T_s=u_s(T)$, $U_s=u_s(U)$. Or si T est isométrique on a $T\subseteqq U$ et ceci entraîne par le corollaire 2.1 $u_s(T)\subseteqq u_s(U)$, donc

---

[12]) Appliqué à U au lieu de T.

[13]) A condition qu'on ne distingue pas entre les différentes réalisations du prolongement $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{H}$.

[14]) A vrai dire, on suppose là au lieu de la convergence forte $T_s\to I$ ($s\to 0$) seulement la convergence faible $T_s\rightharpoonup I$. Or l'équivalence de ces conditions, qui est une conséquence du théorème IV cité, résulte aussi directement de certains théorèmes généraux de Dunford, cf. [2] p. 183—189.

$T_s \subseteq U_s$: T_s est isométrique. Inversement, si T_s est isométrique pour tout $s \geqq 0$, on a $T_s \subseteq U_s$ et

$$[T_s-(1-s)I][T_s-(1+s)I]^{-1} \subseteq [U_s-(1-s)I][U_s-(1+s)I]^{-1} \quad (s>0),$$

d'où il résulte par (12) que $T \subseteq U$: T est isométrique.

Corollaire 5.2. *Si, pour un semi-groupe continu $\{T_s\}$ de contractions, la dilatation unitaire U de la cogénératrice T de $\{T_s\}$ est unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques ($\mathfrak{d}$ un nombre cordinal quelconque) de la transformation unitaire $Vf(\varphi)=e^{i\varphi}f(\varphi)$ de l'espace $L^2(0, 2\pi)$, la dilatation unitaire $\{U_s\}$ de $\{T_s\}$ est unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques du groupe unitaire $\{V_s\}$ de l'espace $L^2(-\infty, \infty)$, défini par $V_s g(x)=e^{isx}g(x)$.*

Démonstration. En vertu du théorème 5, la cogénératrice de $\{U_s\}$ est égale à U, donc on a $U_s=u_s(U)$ et par conséquent $\{U_s\}$ est unitairement équivalent à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques du groupe $\{W_s\}$ de l'espace $L^2(0, 2\pi)$, défini par $W_s f(\varphi)=u_s(e^{i\varphi})f(\varphi)$. Or

$$f(\varphi) \rightarrow g(x)=\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} f(-2 \operatorname{arc\,cotg} x)$$

est une application linéaire isométrique de l'espace $L^2(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ sur l'espace $L^2(-\infty < x < \infty)$, pour laquelle

$$u_s(e^{i\varphi})f(\varphi) \rightarrow e^{isx}g(x),$$

donc $\{W_s\}$ est unitairement équivalent au groupe $\{V_s\}$ indiqué dans le corollaire.

Remarque. En vertu d'un théorème de SCHREIBER [8] l'hypothèse du corollaire 5.2 est vérifiée pour toute contraction au sens strict T (c'est-à-dire pour laquelle $\|T\|<1$), notamment avec $\mathfrak{d}=\dim \mathfrak{H}$.[15]) De cette façon le théorème 3 de l'article [12], sur les semi-groupes de contractions dont la cogénératrice est une contraction au sens strict, apparaît comme une conséquence du théorème de SCHREIBER.

III.

6. D'après J. VON NEUMANN [4], un ensemble fermé S de points du plan complexe s'appelle un *ensemble spectral* de la transformation linéaire bornée T de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ si, pour toute fonction rationnelle $r(\lambda)$ bornée

[15]) Dans [8] on suppose que $\dim \mathfrak{H} \leq \aleph_0$; une démonstration valable pour $\mathfrak{H}$ de dimension quelconque a été donnée dans l'article [12].

sur S, la transformation $r(T)$ existe[16]) et on a

$$\|r(T)\| \leqq \sup_{\lambda \in S} |r(\lambda)|. \tag{17}$$

Il s'ensuit immédiatement de cette définition que le spectre de T, $\sigma(T)$, doit être contenu dans S. Pour T normale, $\sigma(T)$ est lui-même un ensemble spectral de T, mais pour T non-normale cela n'est pas toujours le cas. Tout ensemble fermé qui contient un ensemble spectral de T est évidemment lui-même un ensemble spectral de T. Le disque $|\lambda| \leqq \|T\|$ est toujours un ensemble spectral de T et en particulier le disque unité S_0 est ensemble spectral de toute contraction.[17])

S étant un ensemble spectral de T, VON NEUMANN appelle une fonction $u(\lambda)$ *S-analytique* si elle est limite sur S d'une suite uniformément convergente de fonctions rationnelles $r_n(\lambda)$ ayant leurs pôles à l'extérieur de S (c'est-à-dire dans la partie complémentaire CS du plan complexe). De (17) il s'ensuit que les transformations $r_n(T)$ tendent alors en norme vers une limite, indépendante du choix particulier de la suite $\{r_n(\lambda)\}$, et qu'on peut alors désigner par $u(T)$; c'est une transformation linéaire bornée telle que

$$\|u(T)\| \leqq \sup_{\lambda \in S} |u(\lambda)|. \tag{17'}$$

Les fonctions S-analytiques forment évidemment une algèbre, et l'application $u(\lambda) \to u(T)$ est linéaire et multiplicative. De plus, si l'image de S par la fonction S-analytique $\lambda' = u(\lambda)$ est un ensemble fermé S', (i) S' est un ensemble spectral de $T' = u(T)$, (ii) pour toute fonction S'-analytique $v(\lambda')$ la fonction composée $v \circ u(\lambda) = v(u(\lambda))$ est S-analytique et on a $v \circ u(T) = v(T')$.

Tous ces faits simples se trouvent établis dans le Mémoire cité de VON NEUMANN. Voici quelques remarques additionnelles.

Tout d'abord remarquons que si S est un ensemble spectral de T,

$$Th = \mu h \text{ (pour un } \mu \in S \text{ et un } h \in \mathfrak{H}) \textit{ entraîne } u(T)h = u(\mu)h \tag{18}$$

pour toute fonction S-analytique $\mu(\lambda)$. En effet, cette implication est immédiate pour $r(\lambda)$ rationnelle ayant ses pôles à l'extérieur de S; pour $u(\lambda)$ S-analytique de type général elle s'ensuit alors par un passage à la limite $r_n(\lambda) \to u(\lambda)$, uniforme sur S.

---

[16]) Pour $r(\lambda) = c \prod_i (\lambda - a_i) \prod_j (\lambda - b_j)^{-1}$ $(a_i \neq b_j)$ on définit $r(T)$ directement par $c(T - a_i I)(T - b_j I)^{-1}$ à condition qu'aucun des pôles b_j n'appartient au spectre de T.

[17]) Par raison d'homogénéité il suffit d'envisager le cas où $\|T\| \leqq 1$. Or, dans ce cas, ce résultat de VON NEUMANN est un corollaire du théorème sur l'existence de la dilatation unitaire U de T; en effet, on a $r(T) = \mathrm{pr}\, r(U)$, $\|r(T)\| \leqq \|r(U)\| \leqq \sup_{|\lambda|=1} r(\lambda)$ (voir (6)).

Pour commodité de langage donnons la définition suivante:

Définition 3. *Soit $\bar{\mathcal{O}}(S)$ la classe des fonctions qui sont continues dans S et holomorphes dans tout point intérieur de S.*

Il est manifeste que toute fonction S-analytique appartient à $\bar{\mathcal{O}}(S)$. Dans le cas particulier où S est un ensemble borné dont la frontière ∂S est une courbe simple fermée (bref: si S est un *ensemble jordanien borné*), un théorème de WALSH affirme (voir [14] p. 36) que toute fonction qui est continue sur S et holomorphe dans l'intérieur de S est limite uniforme sur S de polynômes. Donc, *pour les ensembles jordaniens bornés, la classe des fonctions S-analytiques coïncide avec la classe $\bar{\mathcal{O}}(S)$.*

Soient S et S' deux ensembles jordaniens bornés. Soit $\lambda \to \lambda' = s(\lambda)$ une *application conforme* de S sur S'[18]), et soit $\lambda' \to \lambda = \overset{-1}{s}(\lambda')$ l'application conforme inverse. On a évidemment $s(\lambda) \in \bar{\mathcal{O}}(S)$ et $\overset{-1}{s}(\lambda') \in \bar{\mathcal{O}}(S')$. Si S est un ensemble spectral de la transformation T, S' est un ensemble spectral de la transformation $T' = s(T)$, et on a inversement $T = \overset{-1}{s}(T')$. En vertu de (18) les équations

$$Th = \mu h, \quad T'h = \mu' h$$

(où μ, μ' sont deux points de S et S' correspondants par l'application conforme envisagée) s'entraînent mutuellement. Il s'ensuit en particulier que le spectre ponctuel de T' est l'image du spectre ponctuel de T.

Dans ce qui suit on choisira pour S' le disque unité fermé S_0 et on désignera $s(T)$ par T_0, c'est une *contraction*. Soit U_0 la dilatation unitaire de T_0, opérant dans l'espace $\mathfrak{K} \supseteqq \mathfrak{H}$, et soit $N = \overset{-1}{s}(U_0)$.[19]) Comme fonction de la transformation unitaire U_0, N est une transformation *normale*; son spectre est l'image par l'application $\lambda_0 \to \lambda = \overset{-1}{s}(\lambda_0)$ du spectre de U_0 et par conséquent est situé sur ∂S (la frontière de S). Comme on a $u(T_0) =$ $= \mathrm{pr}\, u(U_0)$ pour toute fonction $u(\lambda_0) \in \bar{\mathcal{O}}(S_0)$,[19]) il s'ensuit que, en particulier,

$$T^n = [\overset{-1}{s}(T_0)]^n = \overset{-1}{s}{}^n(T_0) = \mathrm{pr}\,[\overset{-1}{s}{}^n(U_0)] = \mathrm{pr}\,[\overset{-1}{s}(U_0)]^n = \mathrm{pr}\, N^n$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Montrons que les éléments de la forme $N(n)h$[20]) $(h \in \mathfrak{H}$,

---

[18]) Nous entendrons par là une application conforme (proprement dite) de l'intérieur de S sur l'intérieur de S', prolongée (en vertu du théorème de CARATHÉODORY) à une application topologique de S sur S'.

[19]) La classe $\bar{\mathcal{O}}(S_0)$ est évidemment contenue dans toute classe $\mathcal{O}_R(S_0)$ où R est une contraction (voir § 2), et pour $u(\lambda_0) \in \bar{\mathcal{O}}(S_0)$ la définition actuelle de $u(R)$ coïncide avec celle donnée au § 2. Cela est immédiat pour les polynômes de λ_0, et de là on passe au cas d'une fonction $u(\lambda_0) \in \bar{\mathcal{O}}(S_0)$ de type général par l'intermédiaire d'une suite de polynômes convergeant vers $u(\lambda_0)$ uniformément sur S_0.

[20]) $N(n) = N^n$ ou $= N^{*|n|}$ selon que $n \geqq 0$ ou $n < 0$.

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) sous-tendent l'espace $\mathfrak{K}$. Envisageons à cet effet la fonction $s^m(\lambda)$ sur ∂S, m étant un entier fixé quelconque. Cette fonction est continue sur ∂S et par conséquent elle peut être approchée uniformément sur ∂S par la somme d'un polynôme de λ et d'un polynôme de $\bar{\lambda}$ (cf. [14] p. 39). La transformation $U_0^m = s^m(N)$ peut donc être approchée en norme par la somme d'un polynôme de N et d'un polynôme de N^* (nous faisons ici usage de la formule (7) pour les fonctions de type général d'une transformation normale où, dans ce cas, il suffit d'intégrer sur ∂S). Pour tout $h \in \mathfrak{H}$, $U_0^m h$ est donc limite de combinaisons linéaires des éléments $N(n)h$. Or les éléments de la forme $U_0^m h$ sous-tendent l'espace $\mathfrak{K}$, donc les éléments de la forme $N(n)h$ le sous-tendent aussi.

Supposons que N' soit une autre transformation normale, opérant dans un espace $\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{H}$, telle que $\sigma(N') \subseteq \partial S$, $T^n = \mathrm{pr}\, N'^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) et que les éléments de la forme $N'(n)h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) sous-tendent l'espace $\mathfrak{K}'$. Soit $U_0' = s(N')$; puisque $|s(\lambda)| = 1$ sur ∂S donc sur $\sigma(N')$, U_0' est unitaire. Le même raisonnement qui nous a conduits des propriétés de U_0 à celles de N, suivi dans la direction opposée $N' \to U_0'$, fournit que $T_0^n = \mathrm{pr}\, U_0'^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) et que l'espace $\mathfrak{K}'$ est sous-tendu par les éléments de la forme $U_0'(n)h = U_0'^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Or la dilatation unitaire d'une contraction est déterminée de manière univoque, c'est-à-dire à un isomorphisme près, donc il existe une application linéaire et isométrique τ de $\mathfrak{K}$ sur $\mathfrak{K}'$, laissant invariants les éléments de $\mathfrak{H}$, et telle que $U_0' = \tau U_0 \tau^{-1}$. Cela entraîne que $p(U_0') = \tau p(U_0) \tau^{-1}$ pour tout polynôme $p(\lambda)$ et alors $u(U_0') = \tau\, u(U_0) \tau^{-1}$ pour toute fonction $u(\lambda_0) \in \bar{\mathfrak{C}}(S_0)$, en particulier on a $\overset{-1}{s}(U_0') = \tau \overset{-1}{s}(U_0) \tau^{-1}$, donc $N' = \tau N \tau^{-1}$. En d'autres termes, si l'on identifie les éléments de $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}'$ qui se correspondent par τ, N' coïncidera avec N.

En résumant, nous avons démontré le

Théorème 6. *S étant un ensemble spectral jordanien borné de la transformation linéaire bornée T de l'espace $\mathfrak{H}$, il existe, dans un espace $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{H}$, une transformation normale N telle que le spectre de N est situé sur la frontière de S, et que*

$$T^n = \mathrm{pr}\, N^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

en plus, $\mathfrak{K}$ est sous-tendu par les éléments de la forme $N^n h$ et $N^{*n} h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$). Ces conditions déterminent N de manière univoque[21]*. Si $\lambda_0 = s(\lambda)$ est une application conforme de S sur le disque unité fermé S_0, $s(N)$ est la dilatation unitaire de la contraction $s(T)$.*

---

[21]) A condition qu'on ne distingue pas entre les différentes réalisations du prolongement $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{H}$.

Appelons cette transformation N *la dilatation normale de T par rapport à l'ensemble spectral S.*

7. Voici quelques relations spectrales entre T et N qui dérivent de manière plus ou moins immédiate des relations entre une contraction et sa dilatation unitaire.

Théorème 7. (i) *On a $T \subseteq N$ si $s(T)$ est isométrique, et dans ce cas seulement.* (ii) *Si $T \neq N$, c'est-à-dire si T n'est pas elle-même normale ayant son spectre situé sur la frontière de S, le spectre de N recouvre toute la frontière de S.* (iii) *Toute valeur propre de T sur la frontière de S est en même temps une valeur propre de N et inversement, et les vecteurs propres correspondants sont les mêmes pour T et N.*[22]) (iv) *Si S contient dans son intérieur un autre ensemble spectral de T, la dilatation normale N de T par rapport à S est unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques ($\mathfrak{d} = \dim \mathfrak{H}$) de la transformation normale N_S de l'espace $L^2(0, 2\pi)$, définie par $N_S f(\varphi) = \overset{-1}{s}(e^{i\varphi}) f(\varphi)$ où $e^{i\varphi} \to \overset{-1}{s}(e^{i\varphi})$ est l'application topologique du cercle unité sur la frontière de S, induite par l'application conforme $\lambda_0 \to \overset{-1}{s}(\lambda_0)$ du disque unité S_0 sur S.*[23])

Démonstration. *Ad* (i): Si $T_0 = s(T)$ est isométrique, on a $T_0 \subseteq U_0$, donc, en vertu du corollaire 2.1, $T = \overset{-1}{s}(T_0) \subseteq \overset{-1}{s}(U_0) = N$. Inversement, si $T \subseteq N$, on a $p(T) \subseteq p(N)$ pour tout polynôme $p(\lambda)$, d'où il s'ensuit $u(T) \subseteq u(N)$ pour toute fonction $u(\lambda) \in \bar{\mathcal{C}}(S)$, en particulier on a $s(T) \subseteq s(N)$, donc $T_0 \subseteq U_0$: T_0 est isométrique. *Ad* (ii): Le spectre de $U_0 = s(N)$ étant l'image du spectre de N par l'application $\lambda \to s(\lambda)$, si $\sigma(N)$ ne recouvre pas ∂S, $\sigma(U_0)$ ne recouvre pas le cercle unité; or en vertu du corollaire 2.2 cela entraîne que $T_0 = U_0$, et alors $T = \overset{-1}{s}(T_0) = \overset{-1}{s}(U_0) = N$. *Ad* (iii): Puisqu'on a les relations $T_0 = s(T)$ et $T = \overset{-1}{s}(T_0)$, il s'ensuit de (18) que les équations

$$Th = \mu h, \quad T_0 h = \mu_0 h \qquad (\text{où } \mu_0 = s(\mu))$$

s'entraînent mutuellement; par la même raison, les équations

$$Nh = \mu h, \quad U_0 h = \mu_0 h$$

s'entraînent aussi mutuellement. Or, si μ est sur ∂S, μ_0 est sur le cercle unité, et les équations

$$T_0 h = \mu_0 h, \quad U_0 h = \mu_0 h$$

[22]) Par conséquent deux vecteurs propres de T correspondant à deux valeurs propres différentes, situées sur ∂S, sont orthogonaux.

[23]) On peut choisir cette application conforme d'ailleurs arbitrairement.

s'entraînent mutuellement en vertu du théorème 1. Par conséquent, pour μ situé sur ∂S, les équations

$$Th = \mu h, \quad Nh = \mu h$$

s'entraînent mutuellement. *Ad* (iv): Si T a un ensemble spectral S_1 situé dans *l'intérieur* de S, $T_0 = s(T)$ aura l'ensemble spectral $s(S_1)$ situé dans l'intérieur du disque unité S_0, ce qui entraîne que $\|T_0\| < 1$. Or par le théorème de SCHREIBER (voir [8], [12]) la dilatation unitaire U_0 de T_0 est alors unitairement équivalente à la somme orthogonale de $\mathfrak{d}$ répliques de la transformation unitaire $Vf(\varphi) = e^{i\varphi} f(\varphi)$ de l'espace $L^2(0, 2\pi)$. Puisqu'on a $N = \overset{-1}{s}(U_0)$, l'assertion en découle immédiatement.

8. Soit S un ensemble spectral jordanien borné de la transformation T. Nous allons indiquer comment le calcul fonctionnel pour T peut être étendu au delà de la classe $\bar{\mathcal{C}}(S)$, et cela en faisant usage du calcul fonctionnel pour les contractions, envisagé au paragraphe 2.

Soient, comme plus haut, $\lambda_0 = s(\lambda)$ une application conforme de S sur le disque unité S_0 et $\lambda = \overset{-1}{s}(\lambda_0)$ son inverse; soit $T_0 = s(T)$, donc $T = \overset{-1}{s}(T_0)$. Cela étant, convenons de la définition suivante:

Définition 4. *Nous dirons que la fonction $u(\lambda)$, définie dans l'intérieur de S, appartient à la classe $\mathcal{C}_T(S)$, lorsque la fonction $u \circ \overset{-1}{s}(\lambda_0)$, définie dans l'intérieur de S_0, appartient à la classe $\mathcal{C}_{T_0}(S_0)$ correspondant à la contraction T_0 d'après la définition 2 donnée au paragraphe 2, et dans ce cas nous posons par définition*

$$u(T) = u \circ \overset{-1}{s}(T_0).$$

Il est manifeste que cette classe comprend en particulier toutes les fonctions $u(\lambda)$ qui sont holomorphes dans l'intérieur de S et continues dans S sauf au plus en un ensemble dénombrable de points à la frontière, dont aucun n'est une valeur propre de T (en ces points exceptionnels $u(\lambda)$ peut même ne pas être définie). $\mathcal{C}_T(S)$ comprend en particulier la classe $\bar{\mathcal{C}}(S)$, et comme, en vertu de la règle de composition des fonctions S-analytiques, $u \in \bar{\mathcal{C}}(S)$ entraîne $u \circ \overset{-1}{s} \in \bar{\mathcal{C}}(S_0)$ et $u \circ \overset{-1}{s}(T_0) = u[\overset{-1}{s}(T_0)] = u(T)$, on voit que la nouvelle définition de $u(T)$ est consistente avec celle donnée au paragraphe 6. [24])

Théorème 8.1. *La classe $\mathcal{C}_T(S)$ et la définition de $u(T)$ sur cette classe ne dépendent pas du choix particulier de l'application conforme $\lambda_0 = s(\lambda)$ de S sur S_0.*

---

[24]) De la "propriété 4.3" dans [1] il résulte par la même voie que la classe y définie $\mathcal{O}_e[S; T]$ est contenue dans la classe $\mathcal{O}_T(S)$ du présent travail et que les deux définitions des fonctions de T sont consistentes.

Démonstration. Si $\lambda_0' = s'(\lambda)$ est une autre application conforme de S sur S_0, $\lambda_0' = s' \circ \overset{-1}{s}(\lambda_0) \equiv l(\lambda_0)$ sera une application conforme de S_0 sur S_0, donc une homographie. On aura $T_0' = s'(T) = s'[\overset{-1}{s}(T_0)] = s' \circ \overset{-1}{s}(T_0) = l(T_0)$, donc, en vertu du théorème 2 (iv), $v \in \mathcal{O}_{T_0'}(S_0)$ entraîne $v \circ l \in \mathcal{O}_{T_0}(S_0)$ et $v(T_0') = v \circ l(T_0)$. Par conséquent si $u(\lambda)$ est une fonction définie dans l'intérieur de S, telle que $u \circ \overset{-1}{s'} \in \mathcal{O}_{T_0'}(S_0)$, on aura $u \circ \overset{-1}{s} = u \circ (\overset{-1}{s'} \circ s') \circ \overset{-1}{s} = (u \circ \overset{-1}{s'}) \circ l \in \mathcal{O}_{T_0}(S_0)$ et $u \circ \overset{-1}{s'}(T_0') = u \circ \overset{-1}{s}(T_0)$. Les rôles de s et s' étant symétriques, cela démontre l'indépendence de la définition du choix particulier de l'application conforme.

Les propriétés de *linéarité*, de *multiplicativité* et de *convergence* établies au théorème 2 (i) –(ii) se transportent à la classe $\mathcal{O}_T(S)$ de manière évidente. Formulons les propriétés suivantes pour les fonctions composées:

Théorème 8.2. *Soit S un ensemble spectral jordanien borné de la transformation T et soit $u \in \mathcal{O}_T(S)$, $T' = u(T)$.*

(i) *Le spectre de T' est contenu dans l'adhérence $\bar{Z}$ de l'ensemble Z des valeurs prises par $u(\lambda)$ dans l'intérieur de S. Pour toute fonction $w(z)$, holomorphe dans un domaine contenant l'ensemble (borné, fermé et connexe) $\bar{Z}$ dans son intérieur, on a*

$$w \circ u \in \mathcal{O}_T(S) \quad \textit{et} \quad w \circ u(T) = w^{\mathrm{R}}(T'),$$

la lettre R *indiquant qu'il s'agit là de la définition au sens du calcul fonctionnel de Riesz—Dunford* (cf. [7] n° 151).

(ii) *Si, en particulier, $\lambda' = u(\lambda)$ est une application conforme de S sur un ensemble jordanien borné S', on a pour toute fonction $v \in \mathcal{O}_{T'}(S')$:*

$$v \circ u \in \mathcal{O}_T(S) \quad \textit{et} \quad v \circ u(T) = v(T').$$

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence immédiate du théorème 2 (v); en effet on a en vertu de ce théorème

$$w \circ u(T) = w \circ u \circ \overset{-1}{s}(T_0) = w^{\mathrm{R}}(u \circ \overset{-1}{s}(T_0)) = w^{\mathrm{R}}(u(T)),$$

où $\lambda_0 = s(\lambda)$ est une application conforme de S sur S_0, et $T_0 = s(T)$.

Dans le cas (ii) posons $s' = s \circ \overset{-1}{u}$; $\lambda_0 = s'(\lambda')$, est alors une application conforme de S' sur S_0. Soit $T_0' = s'(T')$. En vertu de la règle de composition des fonctions S-analytiques on a

$$T_0' = s \circ \overset{-1}{u}(T') = s(\overset{-1}{u}(T')) = s(T) = T_0.$$

L'hypothèse $v \in \mathcal{O}_{T'}(S')$ est équivalente à ce que $v \circ \overset{-1}{s'} \in \mathcal{O}_{T_0'}(S_0)$, et on a par la définition 4:

$$v(T') = v \circ \overset{-1}{s'}(T_0') = v \circ (u \circ \overset{-1}{s})(T_0') = v \circ u \circ \overset{-1}{s}(T_0') = v \circ u \circ \overset{-1}{s}(T_0) = v \circ u(T),$$

ce qui achève la démonstration.

Observons encore, pour terminer, le fait suivant:

T h é o r è m e 8.3. *Si N est la dilatation normale de T par rapport à l'ensemble spectral jordanien borné S, les classes $\mathcal{C}_T(S)$ et $\mathcal{C}_N(S)$ coïncident, et pour $u \in \mathcal{C}_T(S)$ on a*

$$u(T) = \operatorname{pr} u(N). \tag{19}$$

D é m o n s t r a t i o n. Si $\lambda_0 = s(\lambda)$ est une application conforme de S sur S_0, $U_0 = s(N)$ est la dilatation unitaire de $T_0 = s(T)$ (voir théorème 6) et par conséquent les classes $\mathcal{C}_{T_0}(S_0)$ et $\mathcal{C}_{U_0}(S_0)$ coïncident, et pour $v \in \mathcal{C}_{T_0}(S_0)$ on a par définition $v(T_0) = \operatorname{pr} v(U_0)$. En choisissant en particulier $v = u \circ \overset{-1}{s}$, il résulte l'équation (19).

Ouvrages cités.

[1] C. Foias, La mesure harmonique-spectrale et la théorie spectrale des opérateurs généraux de l'espace de Hilbert, *Bulletin Soc. Math. de France* (à apparaître).

[2] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups* (New York, 1948).

[3] J. von Neumann, Über einen Satz von Herrn M. H. Stone, *Annals of Math.*, **33** (1932), 567—573.

[4] ——— Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, **4** (1951), 258—281.

[5] A. Plessner, Über Funktionen eines maximalen Operators, *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, **23** (1939), 327—330.

[6] ——— Über halbunitäre Operatoren, *ibidem*, **25** (1939), 710—712.

[7] F. Riesz—B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 3. édition (Budapest—Paris, 1955).

[8] M. Schreiber, Unitary dilations of operators, *Duke Math. Journal*, **23** (1956), 579—594.

[9] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgebiete, V/5 (Berlin, 1942).

[10] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.

[11] ——— Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *ibidem*, **15** (1954), 104—114.

[12] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *ibidem*, **18** (1957), 1—15.

[13] ——— *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*. Appendice au livre "Leçons d'analyse fonctionnelle" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).

[14] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain* (New York, 1935).

(Reçu le 1 novembre 1957.)